Chapitre 4 : Utiliser le calcul littéral pour résoudre ou démontrer

I Développer une expression

Définition : **Développer**, c'est transformer un produit en une somme algébrique.

Il existe plusieurs moyens de développer une expression.

1) Distributivité simple

Pour tous les nombres k, a, et b :

Produit	$\rightarrow$	Somme algébrique
$k \times (a + b)$	$=$	$k \times a + k \times b$
$k \times (a - b)$	$=$	$k \times a - k \times b$

Exemples : Développer $A = 2 \times (3x + 7)$ $B = 4x \times (5 - 6x)$ et $C = -3 \times (2x - 7)$

$A = 2\ (3x + 7)$

$A = 2 \times 3x + 2 \times 7$

$A = 6x + 14$

$B = 4x\ (5 - 6x)$

$B = 4x \times 5 - 4x \times 6x$

$B = 20x - 24x^2$

$C = -3\ (2x - 7)$

$C = -3 \times 2x - (-3) \times 7$

$C = -6x + 21$

2) Double distributivité

Pour tous les nombres a, b, c et d :

Produit	$\rightarrow$	Somme algébrique
$(a + b) \times (c + d)$	$=$	$a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Exemples : Développer $D = (2x + 3) \times (x + 7)$ et $E = (3x - 4) \times (-6 + 2x)$

$D = (2x + 3)\ (x + 7)$

$D = 2x \times x + 2x \times 7 + 3 \times x + 3 \times 7$

$D = 2x^2 + 14x + 3x + 21$

$D = 2x^2 + 17x + 21$

$E = (3x - 4)\ (-6 + 2x)$

$E = 3x \times (-6) + 3x \times 2x + (-4) \times (-6) + (-4) \times 2x$

$E = -18x + 6x^2 + 24 - 8x$

$E = 6x^2 - 26x + 24$

$F = (4x - 3)^2$

$F = (4x - 3) \times (4x - 3)$

$F = 4x \times 4x + 4x \times (-3) + (-3) \times 4x + (-3) \times (-3)$

$F = 16x^2 - 12x - 12x + 9$

$F = 16x^2 - 24x + 9$

3) Identité remarquable

Pour tous les nombres a et b :

Produit	$\rightarrow$	Somme algébrique
Produit d'une somme par une différence		
$(a+b)(a-b)$	$=$	$a^2 - b^2$

Exemples : Développer $G = (x+8)(x-8)$; $H = (3x-1)(3x+1)$ et $I = (5x+2)(5x-2)$

$G = (x+8)(x-8)$
$G = x^2 - 8^2$
$G = x^2 - 64$

$H = (3x-1)(3x+1)$
$H = (3x)^2 - 1^2$
$H = 9x^2 - 1$

$I = (5x+2)(5x-2)$
$I = (5x)^2 - 2^2$
$I = 25x^2 - 4$

II Factoriser une expression

Définition : **Factoriser** une expression littérale, c'est transformer (lorsque c'est possible) une somme algébrique en un produit de facteurs.

1) Factorisation simple avec un facteur commun

Rappels sur la distributivité simple : $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$

$k \times (a-b) = k \times a - k \times b$

Pour factoriser une expression, on utilise ces formules, en les lisant de la droite vers la gauche :

$$k \times a + k \times b = k \times (a+b)$$

$$k \times a - k \times b = k \times (a-b)$$

Exemples : Mettre en évidence un facteur commun, puis factoriser :

$3x + 12 = 3 \times x + 3 \times 4 = 3 \times (x+4)$ (Ici, le facteur commun est « 3 »)

$12x - 20 = 4 \times 3x - 4 \times 5 = 4 \times (3x-5)$ (Ici, le facteur commun est « 4 »)

$3x^2 + 5x = x \times 3x + x \times 5 = x\,(3x+5)$ (Ici, le facteur commun est « x »)

$7x^2 - 14x = 7x \times x - 7x \times 2 = 7x\,(x-2)$ (Ici, le facteur commun est « $7x$ »)

$5a + 15b = 5 \times a + 5 \times 3\mathrm{b} = 5\,(a+3b)$ (Ici, le facteur commun est « 5 »)

2) Factorisation avec une identité remarquable

L'identité remarquable (vue dans la partie I) permet de factoriser une expression lorsqu'on a la différence de deux carrés :

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exemples : Reconnaître une différence de deux carrés et factoriser.

$x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x + 6)\ (x - 6)$

$16x^2 - 25 = (4x)^2 - 5^2 = (4x + 5)\ (4x - 5)$

$49 - 4x^2 = 7^2 - (2x)^2 = (7 + 2x)\ (7 - 2x)$

$(x + 2)^2 - 9 = (x + 2)^2 - 3^2 = (x + 2 + 3)\ (x + 2 - 3) = (x + 5)\ (x - 1)$

$(2x - 1)^2 - 4 = (2x - 1)^2 - 2^2 = (2x - 1 + 2)\ (2x - 1 - 2) = (2x + 1)\ (2x - 3)$

III Résoudre une équation

> Propriété : Une équation du premier degré à une inconnue $ax + b = cx + d$ (avec $a \neq c$) admet une solution et une seule.

Exemple : Marc achète au marché 6 pastèques et 8 melons. Ahmed achète lui 4 pastèques et 12 melons. Les deux garçons ont le même poids de fruits.
Sachant qu'un melon pèse 1 kg, quel est le poids d'une pastèque ?

On appelle x : le poids d'une pastèque, on peut alors écrire l'égalité suivante :

$$6x + 8 = 4x + 12$$

Résolution de l'équation :

$6x + 8 = 4x + 12$

On soustrait $4x$ à chaque membre : $6x + 8 \mathbf{- 4x} = 4x + 12 \mathbf{- 4x}$

$2x + 8 = 12$

On soustrait 8 à chaque membre : $2x + 8 \mathbf{- 8} = 12 \mathbf{- 8}$

$2x = 4$

On divise par 2 chaque membre : $\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{4}{\mathbf{2}}$

$x = 2$

2 est la solution. Une pastèque pèse 2 kg.

IV Equation produit nul

Définition : Une **équation produit nul** est une équation dont un membre est un produit et dont l'autre membre est égal à 0.

Exemple : $(3x - 2)(4x - 12) = 0$

Propriétés : Dire qu'un produit est nul revient à dire qu'un de ses facteurs est nul, autrement dit : si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$

et

Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $a \times b = 0$

Résolution de l'équation : $(3x - 2)(4x - 12) = 0$

Si un produit est nul, alors au moins un des deux facteurs est nul, donc

$3x - 2 = 0$ ou $4x - 12 = 0$

$3x = 2$ ou $4x = 12$

$x = \frac{2}{3}$ ou $x = \frac{12}{4} = 3$ Les solutions de l'équation sont : $\frac{2}{3}$ et 3.

Exercice : Résoudre l'équation : $16x^2 - 81 = 0$

Il faut dans un premier temps factoriser le membre de gauche : $16x^2 - 81 = (4x)^2 - 9^2$

$(4x + 9)(4x - 9)$

On doit résoudre l'équation : $(4x + 9)(4x - 9) = 0$ (équation produit nul)

Si un produit est nul, alors au moins un des deux facteurs est nul, donc

$4x + 9 = 0$ ou $4x - 9 = 0$

$4x = -9$ ou $4x = 9$

$x = -\frac{9}{4}$ ou $x = \frac{9}{4}$ Les solutions de l'équation sont : – 2,25 et 2,25.