Chapitre 1 : Effectuer des calculs numériques

I Définitions

Pour tout nombre a non nul et tout nombre n entier positif non nul :

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ Cas particuliers : $a^1 = a$ et $a^0 = 1$

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \ldots\ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$ Ainsi, a^{-n} est l'inverse de a^n.

  Cas particulier : $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Applications :

$9^2 = 9\times9 = 81$; $2^3 = 2\times2\times2 = 8$; $3^4 = 3\times3\times3\times3 = 81$

$(-3)^2 = (-3)\times(-3) = 9$; $(-5)^1 = -5$; $7^0 = 1$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$; $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}$

$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)} = \frac{1}{16}$

II Les puissances de 10

Définitions :Soit n un nombre entier positif :

- $10^n = \underbrace{10\times10\times\ldots\ldots\ldots\times10}_{n \text{ fois}} = 1\underbrace{00\ldots\ldots\ldots0}_{n \text{ zéros}}$

- $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10\times10\times10\ldots\ldots\ldots\times10}_{n \text{ fois}}} = \underbrace{0{,}000\ldots\ldots0}_{n \text{ zéros}}1$

Applications :

$10^4 = 10\,000$ $10^9 = 1\,000\,000\,000$ $10^0 = 1$

$10^{-2} = 0{,}01$ $10^{-6} = 0{,}000\,001$ $10^{-1} = 0{,}1$

III Notation scientifique

Définition :

Un nombre est écrit en **notation scientifique** lorsqu'il est sous la forme : $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et n un entier relatif.

Applications : Ecrire la notation scientifique des nombres suivants.

$6\,740\,000 = 6{,}74 \times 10^6$

$0{,}000\,079 = 7{,}9 \times 10^{-5}$

$48\,000 \times 10^3 = 4{,}8 \times 10^4 \times 10^3 = 4{,}8 \times 10^7$

$798{,}3 \times 10^{-4} = 7{,}983 \times 10^2 \times 10^{-4} = 7{,}983 \times 10^{-2}$

IV Règles de calcul

Pour obtenir le résultat d'une expression, on effectue les calculs dans l'ordre suivant :

❶ Les calculs entre parenthèses
❷ Les puissances
❸ Les multiplications et les divisions
❹ Les additions et les soustractions

Exemples : Calculer les expressions suivantes :

$A = -4^2 + 6 - 5 \times 2^3$
$A = -16 + 6 - 5 \times 8$
$A = -16 + 6 - 40$
$A = -10 - 40$
$A = -50$

$B = (-4)^2 + (6 - 5) \times 2^3$
$B = (-4)^2 + 1 \times 2^3$
$B = 16 + 1 \times 8$
$B = 16 + 8$
$B = 24$

$C = (-4)^2 + 6 - (5 \times 2)^3$
$C = (-4)^2 + 6 - 10^3$
$C = 16 + 6 - 1\,000$
$C = 22 - 1\,000$
$C = -978$

V Les nombres premiers

1) Définition

Un **nombre premier** est un nombre entier positif qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples : 5 est un nombre premier car il est divisible seulement par 1 et par 5.

1 n'est pas un nombre premier car il admet un seul diviseur : 1.

6 n'est pas un nombre premier car il possède plus de deux diviseurs : 1 2 3 6.

0 n'est pas un nombre premier car il possède une infinité de diviseurs.

Les dix nombres premiers inférieurs à 30 sont : 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29

2) Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

Propriété : Un nombre entier supérieur ou égal à 2 peut se décomposer en un **produit de facteurs premiers**. Cette décomposition est unique.

Exemples :

30		75
15 × 2	15 n'est pas un nombre premier, on le décompose.	**15** × 5
5 × **3** × 2	Les facteurs sont tous des nombres premiers, la décomposition est terminée !	**5** × **3** × 5

La décomposition de 30 en produit de facteurs premiers est : $30 = 2 \times 3 \times 5$.

La décomposition de 75 en produit de facteurs premiers est : $75 = 3 \times 5 \times 5$ ou 3×5^2.

Exercice : Décomposer 1 500 en produit de facteurs premiers.

$1\,500 = \mathbf{15} \times \mathbf{100} = \mathbf{3} \times \mathbf{5} \times \mathbf{4} \times \mathbf{25} = 3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$.

La décomposition de 1 500 en produit de facteurs premiers est : $1\,500 = 2^2 \times 3 \times 5^3$.

3) Fractions irréductibles

Définition

Une fraction est **irréductible** si son numérateur et son dénominateur ont pour seul diviseur commun le nombre 1.

Exemples : $\frac{35}{45}$ n'est pas irréductible car 5 est un diviseur commun de 35 et 45.

$\frac{7}{12}$ est irréductible car le seul diviseur commun de 7 et 12 est le nombre 1.

Méthode

Pour rendre une fraction irréductible, on décompose son numérateur et son dénominateur en un produit de facteurs premiers, puis on simplifie cette fraction par tous les facteurs communs.

Exemple : Rendre irréductible la fraction $\frac{30}{75}$

$\frac{30}{75} = \frac{2 \times 3 \times 5}{3 \times 5 \times 5} = \frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{30}{75}$

Application

Rendre irréductible la fraction $\frac{420}{504}$

$$\begin{aligned} 420 &= 42 \times 10 \\ &= 7 \times 6 \times 2 \times 5 \\ &= 7 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7}$$

$$\begin{aligned} 504 &= 2 \times 252 \\ &= 2 \times 2 \times 126 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 63 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 9 \times 7 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \end{aligned}$$

$$\boxed{504 = 2^3 \times 3^2 \times 7}$$

$\frac{420}{504} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$ $\frac{5}{6}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{420}{504}$