Chapitre 5 : Utiliser le théorème de Thalès

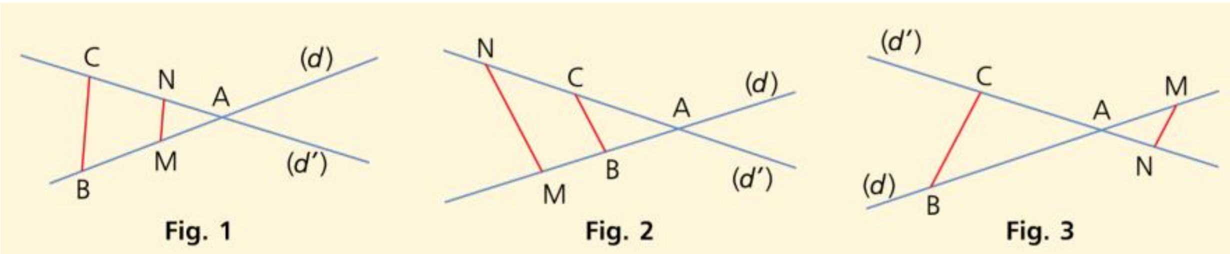
I Théorème de Thalès

Ce théorème sert à calculer une longueur.

Théorème :	Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A, Soient B et M deux points de (d) distincts de A, Soient C et N deux points de (d') distincts de A, Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Ce théorème s'applique dans une situation bien précise dans laquelle il est nécessaire de reconnaitre des droites parallèles et des sécantes.

On a 3 configurations possibles :



Remarques :

- l'égalité des rapports découle du fait que les longueurs des côtés du triangle AMN sont proportionnelles aux longueurs des côtés du triangle ABC

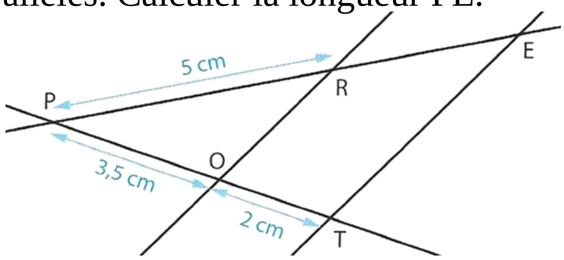
- L'égalité des rapports peut se présenter en utilisant un tableau de proportionnalité :

Côtés du triangle AMN	AM	AN	MN
Côtés du triangle ABC	AB	AC	BC

Il est alors possible de calculer une longueur lorsqu'on en connait trois autres en utilisant l'égalité des produis en croix.

Application 1 :

Sur la figure ci-contre, les droites (OR) et (TE) sont parallèles. Calculer la longueur PE.



▪ On sait que les droites (OR) et (TE) sont parallèles.
On sait aussi que les droites (RE) et (OT) sont sécantes en P.

▪ D'après le théorème de Thalès : $\frac{PR}{PE} = \frac{PO}{PT} = \frac{OR}{TE}$

▪ Calcul de PE : $\frac{5}{PE} = \frac{3,5}{5,5}$ On a : $3,5 \times PE = 5 \times 5,5$ donc $PE = \frac{27,5}{3,5} \approx 7,9$ cm.

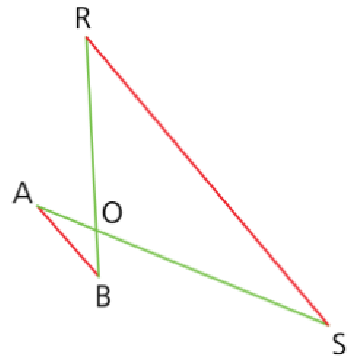
PE mesure environ 7,9 cm.

<u>Application 2</u> :

Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et (RS) sont parallèles.

On donne : AO = 2 cm ; OS = 11 cm et AB = 3 cm.

Calculer la longueur RS.



■ On sait que les droites (AB) et (RS) sont parallèles.
On sait aussi que les droites (AS) et (BR) sont sécantes en O.

■ D'après le théorème de Thalès : $\frac{OA}{OS} = \frac{OB}{OR} = \frac{AB}{RS}$ soit : $\frac{2}{11} = \frac{OB}{OR} = \frac{3}{RS}$

■ Calcul de RS : $\frac{2}{11} = \frac{3}{RS}$ On a : 2 × RS = 11 × 3 donc RS = $\frac{33}{2}$ = 16,5

RS mesure 16,5 cm.

II Conséquence du théorème de Thalès

Cette conséquence permet de démontrer que deux droites ne sont pas parallèles.

<u>Théorème</u> : Soient (*d*) et (*d'*) deux droites sécantes en A,
Soient B et M deux points de (*d*) distincts de A,
Soient C et N deux points de (*d'*) distincts de A,

SI $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ ou $\frac{AN}{AC} \neq \frac{MN}{BC}$ ou $\frac{AM}{AB} \neq \frac{MN}{BC}$ ALORS
les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

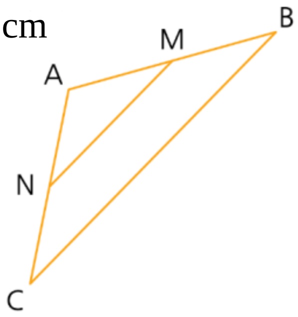
<u>Exemple</u> :

On considère le triangle ABC ci-contre tel que : AB = 12 cm et AC = 10 cm

Le point M appartient au segment [AB] tel que : AM = 6,3 cm

Le point N appartient au segment [AC] tel que : AN = 5,2 cm

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?



● On calcule (séparément) les quotients $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$, puis on les compare :

$\frac{AM}{AB} = \frac{6,3}{12} = 0,525$

$\frac{AN}{AC} = \frac{5,2}{10} = 0,52$

● Comme $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

En effet, si les droites (MN) et (BC) étaient parallèles, les quotients $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ seraient égaux, ce qui est faux.

III Réciproque du théorème de Thalès

Elle sert à démontrer que deux droites sont parallèles

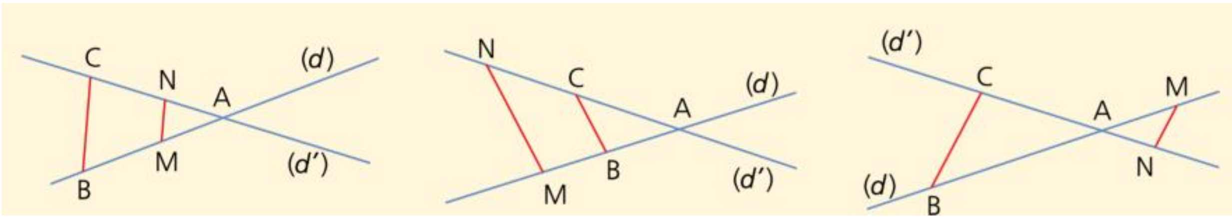
Réciproque : Soient (*d*) et (*d'*) deux droites sécantes en A,
Soient B et M deux points de (*d*) distincts de A,
Soient C et N deux points de (*d'*) distincts de A,

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

et si les points A, B, M et A, C, N sont alignés dans le même ordre

alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

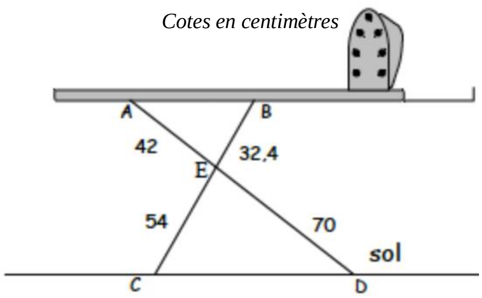
En ce qui concerne l'ordre des points, on retrouve trois configurations :



Les points A, M, B et les points A, N, C sont alignés dans le même ordre | Les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre | Les points M, A, B et les points N, A, C sont alignés dans le même ordre

La réciproque du théorème de Thalès permet de démontrer que deux droites sont parallèles.

Exemple : Cette table à repasser est-elle parallèle au sol ?



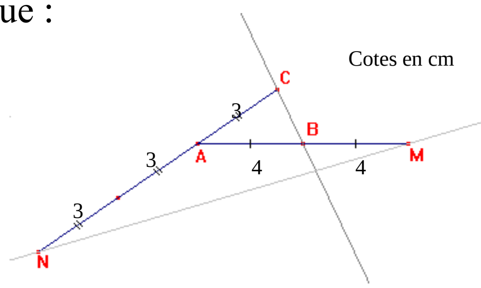
$\frac{EB}{EC} = \frac{32,4}{54} = 0,6$

$\frac{EA}{ED} = \frac{42}{70} = 0,6$

Les points A; E, D d'une part et B, E, C d'autre part sont alignés dans le même ordre.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
La table à repasser est donc parallèle au sol.

Remarque : L'ordre des points est important dans la réciproque :



Dans la figure ci-contre, on a :

$\frac{AM}{AB} = 2$ et $\frac{AN}{AC} = 2$ donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

De plus A, M, B sont alignés et A, N, C sont alignés.

Pourtant, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles car A, B, M et A, C, N ne sont pas dans le même ordre.